# РЕШЕНИЕ ОПТИМИЗАЦИОННЫХ ЗАДАЧ В ЭНЕРГЕТИКЕ ПРИ БОЛЬШОМ ЧИСЛЕ ОГРАНИЧЕНИЙ ТИПА РАВЕНСТВА

**Гродецкий М. В.**
Институт энергетики Академии наук Молдовы

**Реферат** – *Рассматривается способ оптимизации, в основе которого лежит здесь описанный вариант теоретически одношагового метода квадратичного программирования с учетом линейных ограничений типа равенства. Предназначен для решения таких оптимизационных задач в энергетике, в которых необходим учет больших систем уравнений, дающих заполненную матрицу при их линеаризации.*
**Ключевые слова:** *энергетика, оптимизация, ограничения типа равенства*

# THE SOLUTION OF OPTIMIZATION TASKS IN THE ENERGY SECTOR WITH A LARGE NUMBER OF EQUALITY CONSTRAINTS

**Grodetskiy M.V.**
The Institute of Power Engineering of the Academy of Sciences of Moldova

**Abstract –** *the paper describes optimization method based on the theoretically single-step method of quadratic programming which is described here with taking in consideration of linear constrains like equality. Is intended for solution of the optimization tasks in the energy sector, which should be taken into consideration the large equation systems giving the completed matrix with their linearization.*
**Key words -** *energy, optimization, type constraints equality*

# SOLUŢIONAREA PROBLEMELOR DE OPTIMIZARE ÎN ENERGETICĂ LA EXISTENŢA MULTIPLELOR LIMITĂRI DE TIPUL EGALITATE

**Grodeţki M.V.**
Institutul de Energetică al AŞM

**Rezumat –** *În lucrare se analizează metoda de optimizare, la baza căreia se află varianta teoretică a metodei cu un pas de programare pătratică descrisă aici cu considerarea limitărilor liniare de tipul egalitate. Este destinată pentru soluţionarea a astfel de probleme în energetică, în care este necesar considerarea sistemelor mari de ecuaţii, ce dau matricea completă la liniarizarea lor.*
**Cuvinte cheie –** *energetica, optimizarea, limitări de tipul egalitate*

В настоящей работе приведено описание разработанного метода условного нелинейного математического программирования, необходимого для решения ряда задач энергетики и, в частности, задачи прогноза индикаторов безопасности.

В области энергетики есть широкий класс экстремальных задач, таких как задачи прогноза, задачи оптимизация стационарных режимов работы энергетических систем, исследования их экстремальных состояний, анализа режимов работы различных генераторов энергии и многих других. Для этих задач характерна большая или очень большая система ограничений типа равенства и неравенства. Из-за нелинейности этих ограничений задача может быть многоэкстремальной даже при выпуклой целевой функции. В таком случае уже исходная точка оптимизации должна лежать в области искомого оптимума. Если же такая точка неизвестна, приходится искать способ применения метода глобального поиска с возможностью ограниченного перебора, такого как динамическое программирование, что ни всегда удается, и не только из-за невозможности существенного упрощения задачи, а по существу. К счастью, в большинстве реальных задач можно найти исходную точку, от которой оптимальное решение по техническим причинам не может быть далеко. Тогда, если эти задачи не целочисленные, их можно решать методами условного нелинейного математического программирования, но среди этих методов нет ни одного, способного эффективно решать любые задачи.

## 1. МЕТОД

Разработанный алгоритм основан на существенной переработке метода, описанного в работе [1]. Он предназначен для решения задач с большой или очень большой системой из числа m нелинейных уравнений с сильно разреженной матрицей Якоби и с выпуклой или хотя бы унимодальной целевой функцией. Число неизвестных переменных n ненамного превышает число m , а в целевую функцию часто входит только небольшая часть переменных. Входящие в задачу в общем случае нелинейные выражения, являющиеся ограничениями типа неравенства, преобразуются в равенства. Возникающие при этом ограниченные дополнительные переменные, как и ограниченные основные, учитываются штрафами. Сумма штрафов образует выпуклую штрафную функцию, добавляемую к целевой функции.

Метод решения общей задачи оптимизации при нелинейных ограничениях основан на разработанном методе нахождения условного оптимума (минимума) квадратичной целевой функции в пространстве решений системы линейных уравнений. В идеале, при абсолютной точности вычислений, он является одношаговым методом квадратичного программирования без ограничений типа неравенства. Вычислительные ошибки, конечно, делают его итерационным. Этот одношаговый метод основан на следующих трех свойствах квадратичной целевой функции, поверхности уровня которой являются эллипсоидами.

(1) *Направление вектора разности градиентов целевой функции, вычисленных в двух точках, зависит только от направления прямой, на которой лежат эти точки, и не зависит ни от расположения прямой, ни от расположения точек на ней.*

(2) *На произвольно выбранной прямой в любых двух её точках вычисляются градиенты целевой функции и находится точка минимума этой функции. Тогда плоскость, проведенная через эту точку минимума при нормали, равной разности градиентов, пройдет через минимум всей целевой функции (через центр эллипсоидов ее поверхностей уровня).*

(3) *Плоскость, проведенная по пункту (2), будет проходить через центр (условный минимум) эллипсоида, полученного сечением поверхности уровня целевой функции любой плоскостью, если только прямая, использованная для определения проведенной плоскости по пункту (2), лежит на этой секущей плоскости.*

Доказательства этих свойств не сложны.

В основе алгоритма одношагового метода квадратичного программирования лежит решение системы линейных уравнений методом Гаусса. Алгоритм состоит из двух частей. В первой части строятся обе матрицы Гаусса. Верхняя треугольная матрица **U**, возникающая в процессе исключения из уравнений членов с диагональными переменными, и нижняя треугольная матрица **L**, в которой записаны действия, производившиеся над свободными элементами правого столбца. Если надо, здесь **U** и **L** используются для решения системы уравнений, в результате чего рабочая точка **X** (вектор из числа n переменных) оказывается на линейной поверхности $a_0$ пересечения *m* плоскостей линейных ограничений. Во второй части $n-m$ раз выполняются действия по пунктам (2) и (3). С помощью матрицы **U** определяется произвольная прямая, лежащая на поверхности $a_0$, и одномерным спуском по этой прямой точка **X** перемещается в минимум целевой функции. Далее строится нормаль плоскости, проходящей, согласно (3), через условный минимум задачи, лежащий на поверхности $a_0$. Эта операция дает новую плоскость, проходящую через перемещенную точку **X**. Уравнение этой плоскости включается в матрицу **U** (матрица **L** здесь не нужна), которая теперь определяет поверхность $a_1$, а число незаполненных строк матрицы **U** сокращается на единицу. Таким же образом последовательно строятся поверхности $a_k$, пока $k$ не будет равно $n-m$, а матрица **U** полностью заполненной. Точка пересечения всех $n$ плоскостей, включая и плоскости $m$ равенств, является решением задачи – точкой условного минимума $X^*$. Это следует из того, что по пункту (3) все $n-m$ построенных плоскостей содержат условный минимум. Но поскольку он только один (линейные ограничения, выпуклая функция), его точка будет общей точкой для всех плоскостей, то есть их пересечением $X^*$. Этим выполнение алгоритма заканчивается. По существу, этот метод является квазиньютоновским методом второго порядка, использующим некоторое приближение вторых производных (разность градиентов во второй части решения). Его можно назвать Гаусс-квазиньютоновским.

При решении любых более сложных оптимизационных задач процесс становится принципиально многоитерационным. Преобразование исходной задачи к виду, на который рассчитан общий метод условного нелинейного математического программирования, приведен в начале. Таким образом, решается задача оптимизации (минимизации) унимодальной целевой функции при ограничениях типа нелинейных равенств. На каждой итерации в исходной точке **Xo** проводится линеаризация нелинейных уравнений и выполняется алгоритм одношагового квадратичного программирования. Естественно, найденное решение $X^*$ в силу унимодальности целевой функции не является точкой минимума на линеаризованной системе равенств, и она не лежит на нелинейной поверхности ограничений. Поэтому производится возврат точки **X** на нелинейную поверхность в такую исходную точку **Xo** следующей итерации, в которой целевая функция уменьшится. Для возврата на нелинейную поверхность целесообразно иметь возможность использовать вычисленные в начале итерации матрицы **U** и **L** .Для этого надо, чтобы *новая* точка **Xo** оказалась на близком расстоянии от *исходной* точки **Xo**. Процессы возврата могут применяться самые разные, эффективные для одних задач и неэффективные для других. Все зависит от кривизны поверхности решения равенств и «качества» целевой функции – возможно меньшей её вытянутости («овражности»), выпуклости или только унимодальности. Особый случай – это линейная целевая функция. Здесь надо штрафными функциями учитывать ограничения на переменные.

## 2. РЕАЛИЗАЦИЯ

Метод хорошо показал себя при решении тестовых примеров из [2]. Эти примеры хоть и небольшой размерности, но решаются плохо. С применением этого метода было разработано приложение для решения задач оптимизации установившихся режимов электроэнергетических систем: по потерям, расходу топлива и другим задачам [3].

В настоящее время разработана улучшенная версия метода, алгоритма и программы в виде библиотечной программы “UNIMIN” на языке VBA в системе Microsoft Office. Эта программа предназначена для создания оптимизационных блоков при разработке приложений на основе Excel или Access. В частности, она используется при решении задачи прогноза индикаторов энергетической безопасности в несколько иной постановке, чем в статье «*М.В.Гродецкий, Прогнозирование индикаторов энергетической безопасности*», опубликованной в этом сборнике. Но и в упомянутой статье предполагается использовать программу UNIMIN при дальнейшем развитии работ.

## ЛИТЕРАТУРА

[1] М.В.Гродецкий, *Прикладной метод условного нелинейного программирования,* Труды Института энергетики Академии наук Республики Молдова, Кишинев, 1996, 11 с.

[2] Б.Т.Поляк, *Введение в оптимизацию*, Москва, «Наука», 1983, 384 с..

[3] М.В.Гродецкий, В.Г.Денисенко, *Расчетный комплекс экономических режимов энергетической системы,* Сб.докл. "Энергетичечкий форум - 97", (3), Болгария.